$\cap$ = et ; $\cup$ = ou
$P \cap Q$; $P \cup Q$
$P \times Q$; $P + Q$

$P \Rightarrow Q$ تساوي $\overline{P}$ ou Q

P	Q
1	1
0	0
1	0
0	1

la négation dans propositions
$>$: $\leq$; $<$: $\geq$; $\forall$: $\exists$; $\exists$: $\forall$; $=$: $\neq$; $\in$: $\notin$

$\cap$: تقاطع Inter

$\cup$: (مجال A + مجال B) اتحاد Union

$A, B \Rightarrow$ معناه حد المجال A و B

A/B : المجال الذي لا يشترك فيه A مع B

B/A : المجال الذي لا يشترك فيه A مع B

C_{IR}^{A} : المجال الذي ليس موجود فيه A

C_{IR}^{B} : المجال الذي ليس موجود فيه B

(non P) ou Q : $P \Rightarrow Q$
l'équivalence
$P \Leftrightarrow Q$ et l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

ecrire la negation : non

contraposée : regarde Exp (1)
$P \Rightarrow Q$ est dequivalence non (Q) =>

$ax^2 + bx + c$: معادلة الدرجة 2
$\Delta = b^2 - 4ac$: حساب حل المعادلة
$\Delta < 0$: لا يوجد حل : إشارة المعادلة إشارة a
$\Delta = 0$; $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$; $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x^2 - y_a^2 = x - y_a$ $a \in \mathbb{R}$
$cl(a) = \{x \in R, xRa\}$ la classe (cl)
a حلول (x) وليس حل : la classe dequivalence

* injective : $\forall x_1, x_2 \in E \; (f(x_1) = f(x_2)$ ... $x_1 = x_2$

* surjective : $\forall y \in F \; \exists x \in E \; (y = f(x)$

* Bijective : $\forall y \in F \; \exists! x \in E \; (y = f(x)$

Relation d'équivalence :
* reflexive : $\forall x \in E, \; xRx$
* Symetriques : $\forall x, y \in E, \; xRy$ alors y...
* transitive : $\forall x, y, z \in E. \; (xRy$ et $yRz) \Rightarrow xRz$

Application réciproque : f^{-1}
Exp : $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$
$x \to \ln x$
$y = \ln x$ } $f^{-1}(y) = e^y$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sin(x_1) - \sin(x_2) = 0$$
$$2\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0$$

Relation d'ordre :

réflexive : $\forall x \in E,\ x R x$

antisymétrique : $\forall x, y \in E$, ($x R y$ et $y R x$) alors $x = y$

transitive : $\forall x, y, z \in E$ ($x R y$ et $y R z$) alors $x R z$

Exp (1) : $\forall x, y \in \mathbb{R}\quad x \neq y \Rightarrow 3x + 2 \neq 3y + 2$

$3x + 2 = 3y + 2 \Rightarrow x = y$ c'est le contraposé

Pour montrer par récurence : البرهان بالتراجع

1) Initialisation : on montre que $P(0)$ est vraie

2) hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie

⋮

conclusion : par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}\quad 2^2 > n$

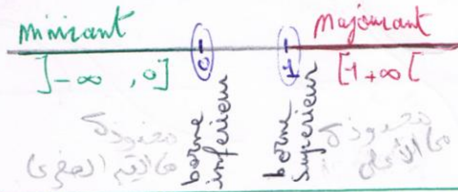
---

tautologie est une proposition qui est vraie dans tous les cas.

Majorant et minorant

Maximum $A = 1 \notin A$ n'existe pas
minimum $A = 0 \in A$ existe

Soit $A = [0, 1[$



Monotone :

* f est croissante : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ et elle strictement croissante si au lieu de $\leq$ on a $<$
* f est décroissante : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$; strictement décroissante $\Rightarrow >$

fonction paire $\Rightarrow f(-x) = f(x)$
fonction impaire $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

La limite d'une fonction f en point

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Pour montrer une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$ et admet elle une solution

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ou $f(c) = 0$

Le prolongement par continuité :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$f(x) \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Le prol par cont sui ℓ existe

Dérivée en point : (dérivable en x_0)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exp : $f(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{(x - x_0)} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)}$

$\lim = 2x_0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ / $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Théorème de rolle : (نظرية رول)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivée sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ que $f'(c) = 0$

Théorème des accroissement finis :

f continue sur $[a, b]$ et dérivée sur $]a, b[$ il existe $c \in]a, b[$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Théorème de l'hopitale :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حالات عدم التعيين :

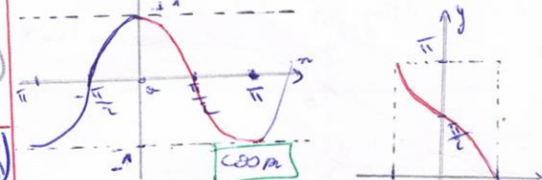
$+\infty - \infty$ | $\frac{0}{0}$
$0 \times \infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$

Fonctions usuelles :

Fonctions circulaires inverses :

Arc cosinus : $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$

$\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$



$$\operatorname{Arc} \cos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \forall x \in]-1, 1[$$

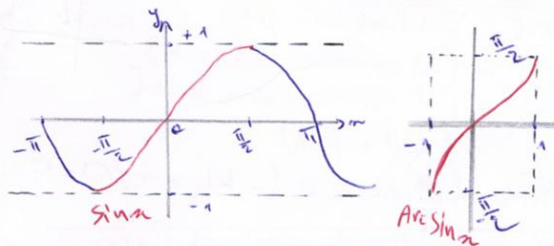
$\cos(\arccos x) = x$
$\operatorname{Arc}\cos(\cos x) = x$

$\cos x = y \Rightarrow x = \operatorname{Arc}\cos y$

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = \frac{-V'}{V^2} \quad \left\{ \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} \right.$$

2/ Arcsinus $\sin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

$\text{Arcsin} [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\text{Arc}'\sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1, 1[$

$\sin(\text{arc}\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

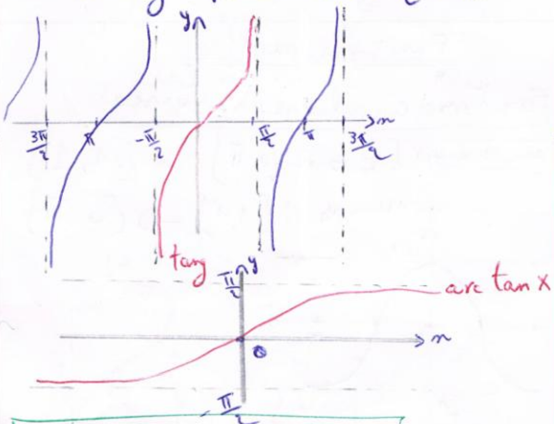
$\text{Arc}\sin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\sin(x) = y \Rightarrow x = \text{Arc}\sin y$

2/ Arctangente

$\tan \;]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\text{Arc tang} \; \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



$\text{Arc}'\tan(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{Arc}\tan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\tan(x) = y \Rightarrow x = \text{Arc}\tan y$

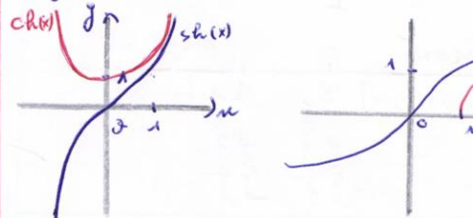
3/ Fonctions hyperbolique et hyperboliques inverses :

A/ cosinus hyperbolique et son inverse :

cosinus hyperbolique $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$ch : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une

$\text{Arg}\, ch : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$



$(\text{Arg}\,ch)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

ch est
Sh est

B/ sinus hyperbolique et son inverse

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement croissante

$\lim_{x \to -\infty} sh x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} sh(x) = +$

donc une bijection.

$\text{Arg}\, Sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Proposition : * $ch^2 x - sh^2 x = 1$

* $ch' x = sh$ et $sh' x = ch(x)$

* $\text{Arg}\,sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et cont

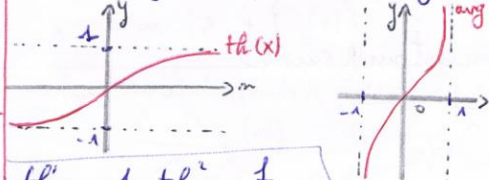
* arg sh est dérivable et $(\text{arg}\,sh)' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

* $\text{arg}\,sh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

C/ Tangente hyperbolique et son inverse :

tangente hyperbolique $th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$

La fonction $Th : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijectio
on note $\text{argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection



$th' x = 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$

$\text{argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$

th et
sont

Série 04

$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\sqrt{(1+x^2)}$

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ / $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

pour montrer f est continue en 0 : $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = l$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

fonction f periodique
$f(x+T) = f(x)$

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$

Dérivable en x_0

f n'est pas continue en point x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0

D/ Trigonométrie hyperbolique :

$ch^2x - sh^2x = 1$

$ch(a+b) = ch\,a . ch\,b + sh\,a . sh\,b$

$ch(2a) = 1 + 2sh^2a$

$sh(a+b) = sh\,a . ch\,b + sh\,b . ch\,a$

$sh(2a) = 2sh\,a . ch\,a$

$th(a+b) = \dfrac{th\,a + th\,b}{1 + th\,a . th\,b}$

$\arg ch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$

$\arg sh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$

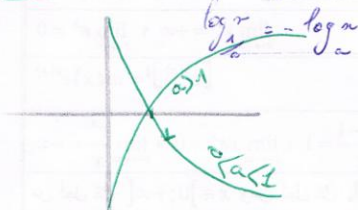
$\arg th(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$

logarithme de base a :

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a(x . y) = \log_a x + \log_a y$



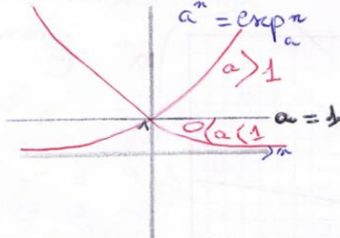
exponentielle de base a :

$\exp_a x = e^{x \ln a}$

$\exp_a(0) = 1$

$e^{x\ln a} = e^{-x\ln\frac{1}{a}} = \exp_{\frac{1}{a}}^{-x}$

$a^x = \exp_a x$



Pour montrer f est continue en x_0

faut : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

donc f est continue.

---

classe C^1 : (معناه)

$f'(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$

ونكونوا مبرهنين على الاستمرارية (la continuité)

f de classe $C^2 \Rightarrow$
1. f continue et dérivable
2. f' continue et dérivable
3. f'' continue

تابع | classe C^1 :
- la fonction f est continue
- $f'(x)$
- $f'(x)$ est continue en tout point
- $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$

Théorème des accroissements finis générales :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Série 01

1) **Formule de Taylor lagrange :**

Soit f de classe C^n sur $[a,b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe une valeur c de $]a,b[$ telle que :

$$f(b) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$= f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \text{Rest}$$

cette formule est connue par la formule de Taylor lagrange à l'ordre n.

2) **formule de Taylor-Young :**

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\text{Rest}}$$

et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\text{Rest}}$$

et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

3) **formule de Maclaurin :**

c'est la formule de Taylor-lagrange avec $b = x$, $a = 0$ et $c = \theta x$ avec $0 < \theta < 1$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $0 < \theta < 1$